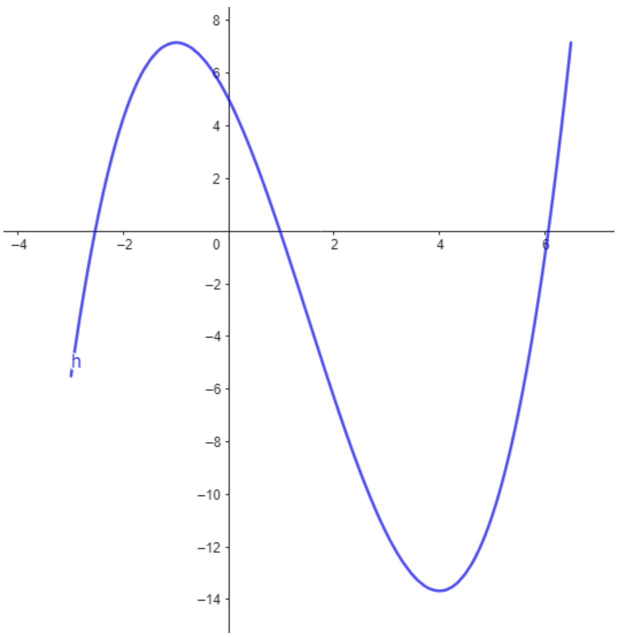
Funksjonsanalyse - Oppgaver med løsningsforslag

Løysingforslag kjem nederst

Oppgåve 1. Kor skjærer funksjonen $y(x) = 5x - 7$ x-og $y$aksen?

Oppgåve 2. Skisser plynomet $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

Oppgåve 3. Finn topp-, bunn og nullpunkt i grafen under.



Oppgåve 4. Skisser grafene:

a) $\sqrt{x}$

b) $\sin \pi x$

c) $\dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$

d) e^x

e) $\ln x$

Oppgåve 5. Finn definisjonsmengda og verdimengda til funksjonane i oppgåve 4.

Oppgåve 6. La $g(x) = x^5((x-2)^2 + 2x - 5)^8$.

a) Kva er graden til plynomet?

b) Finn alle røtane til polynomet.

c) Faktoriser plynomet så mye som mulig.

Oppgåve 7. Deriver funksjonane

a) $x^2 + 2x - 18$

b) $\cos \dfrac{x}{\pi}$

c) $\dfrac{x+1}{x+2}$

d) e^x

e) $\sqrt{x^3}$

f) $ax^2 + bx + c$

Oppgåve 8. Bruk definisjonen av den deriverte og vis at $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$. Definisjonen av den deriverte er:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Oppgåve 9. Finn alle asymptotane:

a) $\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{1}{x+3}$

c) $\dfrac{x+2}{x^2+8x+15}$

d) $\dfrac{x^2+8x+15}{x+2}$

Me seier ein funksjon er gjevn dersom han følger $f(-x) = f(x)$, og at ein funksjon er odde om han følgjer $f(-x) = -f(x)$. Nokon funksjonar er korkje odde eller gjevne.

Oppgåve 10. Avjger om funksjonnen er odde, gjevne eller ingen av delene.

a) $\sin \pi x$

b) $\sqrt{2x}$

c) $\dfrac{1}{x^3+x}$

d) $x + x^2$

Nøtter

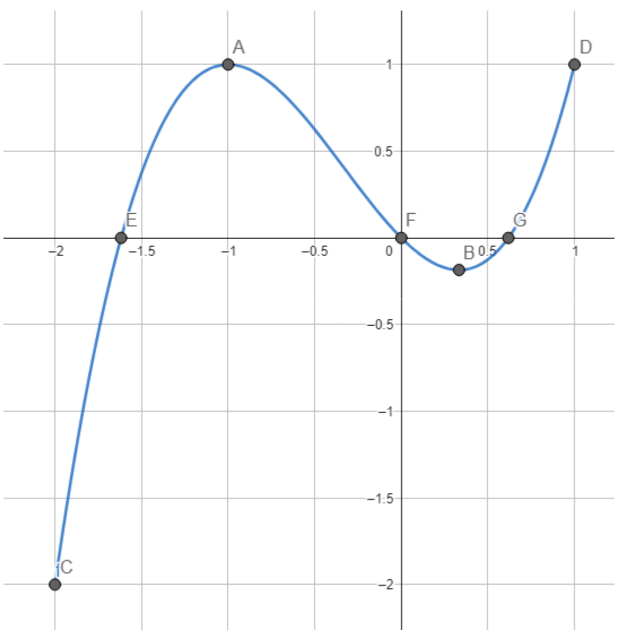
Nøtt 1. Funksjonen $f(x) = x^n$ og $n > 1$ er et naturlig tal. Vis at $f'(x) = nx^{n-1}$.

Nøtt 2. La $f(x) = |x|$. Tegn $f(x)$ og $f'(x)$, eksisterer $f'(0)$

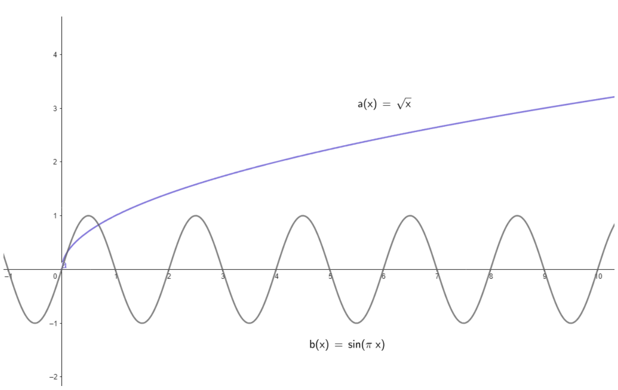
Løysingsforslag

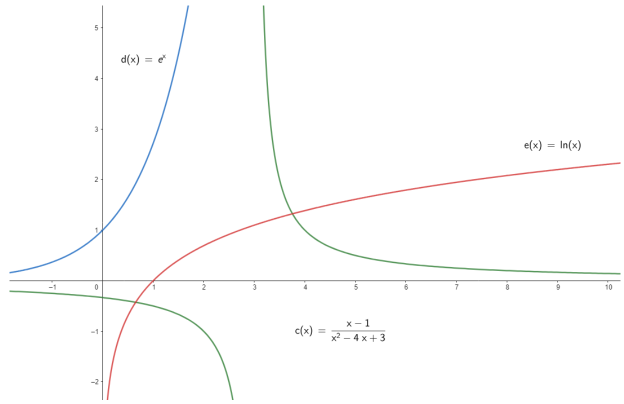
Oppgåve 1. Først sit me $x = 0$ for å finne kor den skjærer i y-aksen, så sit me $y = 0$ for å finne kor den skjære i x-aksen. Funksjonen skjærer y-aksen i $(0, -7)$ og x-aksen i $(\frac{7}{5}, 0)$.

Oppgåve 3.



Oppgåve 4.





Oppgåve 5. Definisjonsmengdene: a) $(-\infty, \infty)$, b) $(-\infty, \infty)$, c) $(-\infty, 3)$ og $(3, \infty)$, d) $(-\infty, \infty)$, e) $(0, \infty)$.

Verdimengdene: a) $(0, \infty)$, b) $[-1, 1]$, c) $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$, d) $(0, \infty)$, e) $(-\infty, \infty)$.

Oppgåve 6. a) Graden kan finne me ved å gange ut alle parentesene, men det er mykje jobb. Om ein heller berre stirar på utrykket ein stund ser ein kanskje at den innerste parentesen har høgeste grad 2. Når me er ute etter grad trenger me kun tenkje på leddet med høgst grad. Da vil $(x^2)^8 = x^{16}$. Når med så multipliserer det leddet med x^5 blir det høgste leddet $x^5 \cdot x^{16} = x^{21}$.

Graden til $p(x)$ er dermed 21.

b) Me ser umiddelbart at $p(x) = 0$ når $x = 0$ på grunn av x^5 leddet.

For å finne dei resterande røtane nøstar me opp i den indre parentese, $(x-2)^2 + 2x - 5 = x^2 - 2x - 1 = 0$. Nå må me bruke ABC-formelen

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$p(x)$ har dermed 0, $1 + \sqrt{2}$ og $1 - \sqrt{2}$ som nullpunkt.

c) $p(x) = x^5(x-1-\sqrt{2})^8(x-1+\sqrt{2})^8$

Oppgåve 7. a) $2x+2$, b) $-\frac{1}{\pi}\sin\frac{x}{\pi}$, c) $\frac{1}{(x+2)^2}$, d) e^x, e) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, f) $2a+b$

Oppgåve 8.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h.$$

$$\Rightarrow 2x$$

Oppgåve 9. Me finn asymptotane ved å sjekke kva som skjer når anten x eller y går mot $\pm\infty$.

a) Først lar med $x \to \infty$. Da blir $\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} \to 0$.

y tangerer mot ∞ når nevneren tangerer mot 0. Når $x \to 0$ blir $\frac{1}{x} \to \infty$.

Asymptote er i $x = 0$ og $y = 0$.

b) Asymptote på $x = 0$ og $y = -3$, c) Asympotet i $y = 0$ $x = -3$ og $x = -5$, d) $x = -2$ og $y = x + 6$

Oppgåve 10. a) Odde, b) ingen, c) odde, d) ingen.