

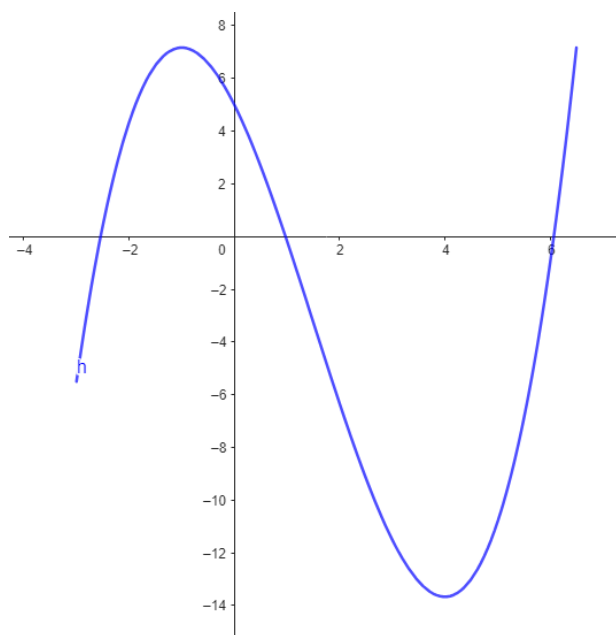
Funksjonsanalyse - Oppgaver med løsningsforslag

Løysingsforslag kjem nederst

Oppgave 1. Kor skjer funksjonen $y(x) = 5x - 7$ **Oppgave 5.** La $g(x) = x^5((x - 2)^2 + 2x - 5)^8$.
 x -og y -aksen?

Oppgave 2. Skisser polynomet $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

Oppgave 3. Finn topp-, bunn og nullpunkt i grafen under.



a) Kva er graden til polynomet?

b) Finn alle røtane til polynomet.

c) Faktoriser polynomet så mye som mogleg.

Oppgave 6. Deriver funksjonane

a) $x^2 + 2x - 18$

b) $\cos \frac{x}{\pi}$

c) $\frac{x + 1}{x + 2}$

d) e^x

e) $\sqrt{x^3}$

f) $ax^2 + bx + c$

Oppgave 4. Skisser grafene:

a) $\sqrt{x}$

b) $\sin \pi x$

c) $\frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

d) e^x

e) $\ln x$

Oppgave 7. Bruk definisjonen av den deriverte og vis at $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$. Definisjonen av den deriverte er:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Oppgave 8. Finn alle asymptotane:

a) $\frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x+3}$

c) $\frac{x+2}{x^2+8x+15}$

d) $\frac{x^2+8x+15}{x+2}$

Me seier ein funksjon er gjevn dersom han følger $f(-x) = f(x)$, og at ein funksjon er odde om han følgjer $f(-x) = -f(x)$. Nokon funksjonar er korkje odde eller gjevne.

Oppgave 9. Avjger om funksjonene er odde, gjevne eller ingen av delane.

a) $\sin \pi x$

b) $\sqrt{2x}$

c) $\frac{1}{x^3+x}$

d) $x+x^2$

Nøtter

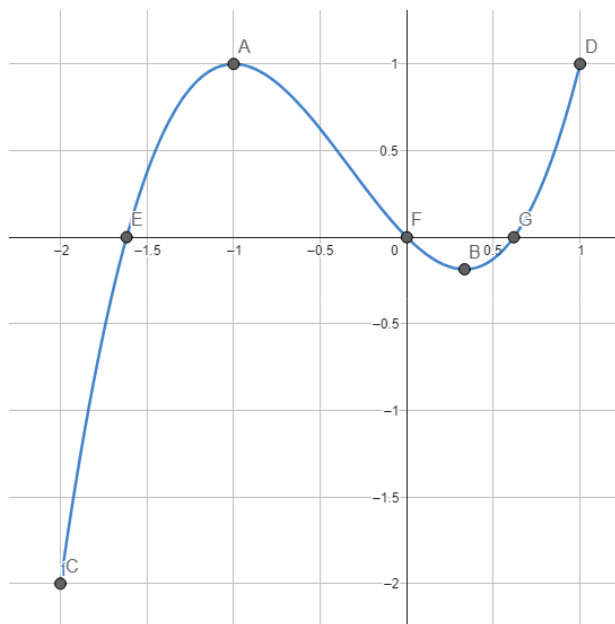
Nøtt 1. Funksjonen $f(x) = x^n$ og $n > 1$ er et naturlig tal. Vis at $f'(x) = nx^{n-1}$.

Nøtt 2. La $f(x) = |x|$. Tegn $f(x)$ og $f'(x)$, eksisterer $f'(0)$?

Løysingsforslag

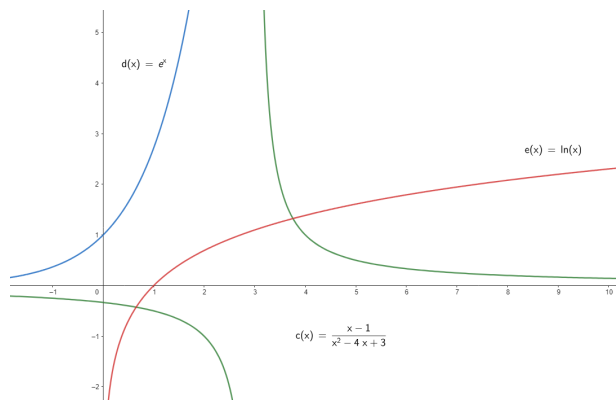
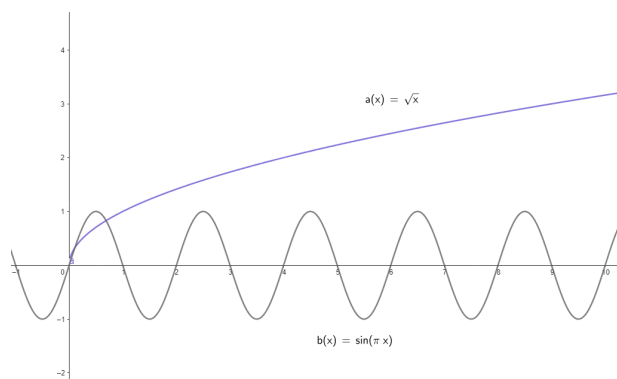
Oppgave 1. Først set me $x = 0$ for å finne kor den skjer i y -aksen, så set me $y = 0$ for å finne kor den skjer i x -aksen. Funksjonen skjer y -aksen i $(0, -7)$ og x -aksen i $(\frac{7}{5}, 0)$.

Oppgave 3.



A og D er topppunkt, B og C er botnpunkt og E, F, G er nullpunkt (evt. røtar).

Oppgave 4.



Oppgave 5.

a) Graden kan finne me ved å gange ut alle parentese, men det er mykje jobb. Om ein heller berre stirar på uttrykket ein stund ser ein kanskje at den innerste parentesen har høgste grad 2. Når me er ute etter grad trenger me kun tenkje på leddet med høgst grad. Da vil $(x^2)^8 = x^{16}$. Når med så multipliserer det leddet med x^5 blir det høgste leddet $x^5 \cdot x^{16} = x^{21}$.

Graden til $p(x)$ er dermed 21.

b) Me ser umiddelbart at $p(x) = 0$ når $x = 0$ på grunn av x^5 leddet.

For å finne dei resterande røtane nøstar me opp i den indre parentese, $(x - 2)^2 + 2x - 5 = x^2 - 2x - 1 = 0$. Nå må me bruke ABC-formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$p(x)$ har dermed 0, $1 + \sqrt{2}$ og $1 - \sqrt{2}$ som nullpunkt.

$$c) p(x) = x^5(x - 1 - \sqrt{2})^8(x - 1 + \sqrt{2})^8$$

Oppgave 6.

a) $2x + 2$.

b) $-\frac{1}{\pi} \sin \frac{x}{\pi}$. Kjernerregel

c) $\frac{1}{(x+2)^2}$. Produktregel

d) e^x . Eksponentialfunksjon(regel)

e) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$, me deriverar: $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

f) $2ax + b$

Nøtt 1. Bruk binomialformelen eller skriv ut uttrykket for $n = \{2, 3, 4\}$ og se om du finn nokre gjentakningar.

Oppgåve 7.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h. \\ \Rightarrow 2x\end{aligned}$$

Oppgåve 8. Me finn asymptotane ved å sjekke kva som skjer når anten x eller y går mot $\pm\infty$.

a) Først lar med $x \rightarrow \infty$. Da blir $\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$.

y tangerer mot ∞ når nevneren tangerer mot 0. Når $x \rightarrow 0$ blir $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$.

Asymptotar i $x = 0$ og $y = 0$.

b) Asymptotar på $x = -3$ og $y = 0$.

c) Annengradsuttrykket i nevneren har røtar i $x = -3$ og $x = -5$, her vil $f(x) \rightarrow \pm\infty$. Når $x \rightarrow \pm\infty$ vil annengradsuttrykket dominere og vi kan sjå for oss at $\frac{\infty}{\infty^2} = 0$. (Dette er ikkje heilt matematisk korrekt, men visualiseringa er god)

Asymptotar i $y = 0$ $x = -3$ og $x = -5$.

d) Med polynomdivisjon skriv me om funksjonen $\frac{x^2+8x+15}{x+2} = 1x + 6 + \frac{3}{x+2}$. Når me nå lar $x \rightarrow \mp\infty$ vil uttrykket bli $y = x + 6$.

Asymptotar i $x = -2$ og $y = x + 6$

Oppgåve 9. a) Odde, b) ingen, c) odde, d) ingen.