

Geometri - oppgaver med løsningsforslag

Løsningsforslag kommer

Oppgave 1. Løs likningene for $x \in [0, 2\pi)$

a) $4 \sin x - 1 = 1$

b) $3 \tan x + 3 = 0$

c) $4 \sin^2 x + 8 \sin x + 4 = 0$

d) $2 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$

Oppgave 2. La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \quad x = (0, 20)$$

Finn amplituden, likevektslinja og perioden.

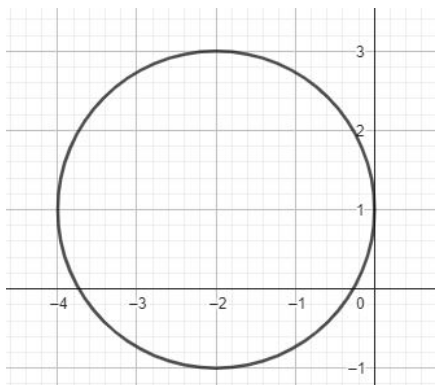
Oppgave 3. Skissér følgende uttrykk

a) $x^2 + y^2 \leq 1$

b) $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

c) $2x + 3y - 5z = 3$

Oppgave 4. Finn likningen for sirkelen



Oppgave 5. En trekant har sidelengder 3, 4 og 5.

Hva er arealet av trekanten?

Oppgave 6. To vektorer er gitt ved $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$

og $\mathbf{v} = (3, -5, 1)$?

a) Hva er lengden til $\|\mathbf{u}\|$ og $\|\mathbf{v}\|$?

b) Hva er lengden til $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$?

c) Hva er kryssproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

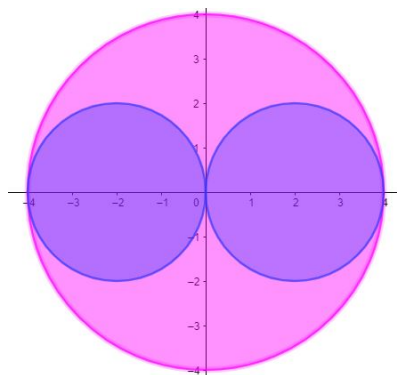
d) Hva er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Oppgave 7. Finn a slik at vektorene $\mathbf{x}_1 = (4, a, -1)$

og $\mathbf{x}_2 = (2, 3, a)$ er ortogonale.

Oppgave 8. Hva er arealet av det rosa området?

Radiusen til den største sirkelen er 4, mens radiene til de to små sirklene er 2.



Oppgave 9. Bruk enhetssirkelen til å vise at

a) $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$

b) $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$

c) $\cos(-\theta) = \cos \theta$

d) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

Dagens nøtter

Nøtt 1. La $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vis at kryssproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ står normalt på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Nøtt 2. Planet α er bestemt av punktene $A = (1, 0, 3)$, $B = (0, 1, 2)$ og $C = (2, 3, 2)$.

a) Bestem en likning for planet α .

b) Bestem en likning for planet β som er parallelt med α og går gjennom punktet $P = (2, -5, 5)$.

c) Ei kule tangerer α i punktet A og β i et punkt Q . Bestem eksakte verdier for koordinatene til Q .

Løsningsforslag

Oppgave 1.

a)

$$4 \sin x - 1 = 1$$

$$4 \sin x = 2$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\implies x = \frac{\pi}{6} \text{ eller } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

b)

$$3 \tan x + 3 = 0$$

$$3 \tan x = -3$$

$$\tan x = -1$$

$$\implies x = \frac{3\pi}{4} \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

c) Dette er en andregradslikning. La $u = \sin x$

$$4 \sin^2 x + 8 \sin x + 4 = 0$$

$$4u^2 + 8u + 4 = 0$$

$$u^2 + 2u + 1 = 0$$

$$(u + 1)^2 = 0$$

$$\implies u = -1$$

Altså $\sin x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{2}$.

d)

$$\begin{aligned}2 \sin \left(\frac{\pi}{6} x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 &= 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{6} x - \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{\pi}{6} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} &\Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 1 + 2 = 3 \\ \text{eller } \Rightarrow \frac{\pi}{6} x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} &\Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 5 + 2 = 7 > 2\pi\end{aligned}$$

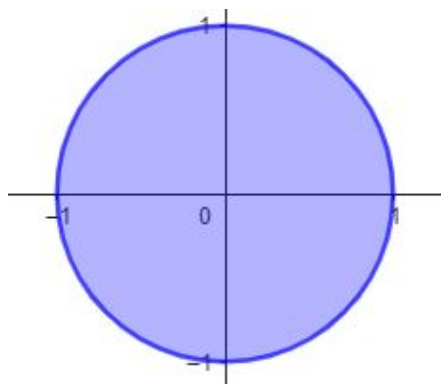
Så $x = 3$.

Oppgave 2.

Ved å sammenligne med den trigonometriske funksjonen fra teori-delen, ser vi at amplituden er $A = 2$, likevektslinja er $y = -1$ og perioden er $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$.

Oppgave 3

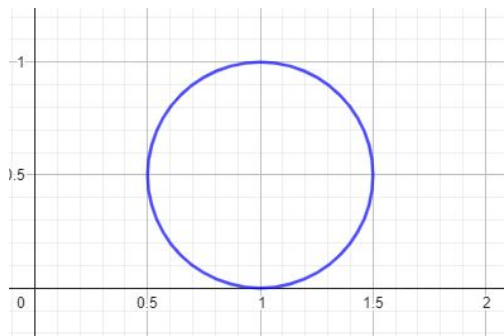
a) $x^2 + y^2 = 1$ er en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Området $x^2 + y^2 \leq 1$ er dermed området inni denne sirkelen, inkludert sirkelen selv.



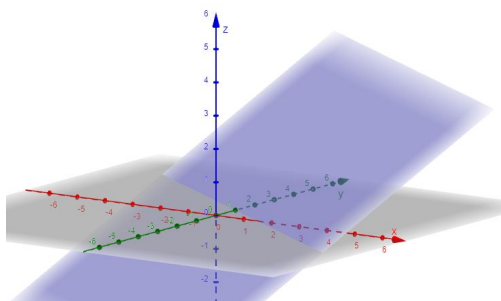
b) Vi starter med å fullføre kvadratet for x og y

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - y + 1 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Dette kjenner vi igjen som en sirkel med sentrum i $(1, \frac{1}{2})$ og radius $\frac{1}{2}$.



c) Når man skal tegne et plan for hånd, kan det være lurt å sjekke hvordan skjæringen med xy -, yz - og xz -planet er. For eksempel, sjekker man xy -planet ved å se hva som skjer når $z = 0$. I xy -planet er altså skjæringen gitt ved linjen $2x + 3y = 3 \implies y = -\frac{2}{3}x + 1$, altså en rett linje med konstantledd 1 og stigningstall $-\frac{2}{3}$. Tilsvarende, finner man skjæringen i yz - og xz -planet, som man da kan sette sammen til et plan i xyz -rommet.



Oppgave 4.

Vi ser at sentrum er i $(-2, 1)$, og at radiusen er 2. Likningen blir dermed

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Oppgave 5. Vi har at $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Siden sidelengdene oppfyller pytagoras' setning, er dette en rettvinklet trekant med kateter med lengde 3 og 4, så arealet blir $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Oppgave 6.

a)

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35}.$$

b)

$$\mathbf{w} = (1 + 3, 2 - 5, -3 + 1) = (4, -3, 2).$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}.$$

c)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-5) \cdot (-3) \\ -(1 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)) \\ 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

d)

For skalarproduktet gjelder $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$ hvor θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 = 3 - 10 - 3 = -10$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

Dermed blir

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \right) = \arccos \left(\frac{-10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} \right) = 116.9^\circ$$

(arccos er det samme som $\cos^{-1}$)

Oppgave 7.

To vektorer er ortogonale dersom skalarproduktet er 0. Skalarproduktet mellom $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 4 \cdot 2 + a \cdot 3 + (-1) \cdot a = 8 + 3a - a = 8 + 2a$$

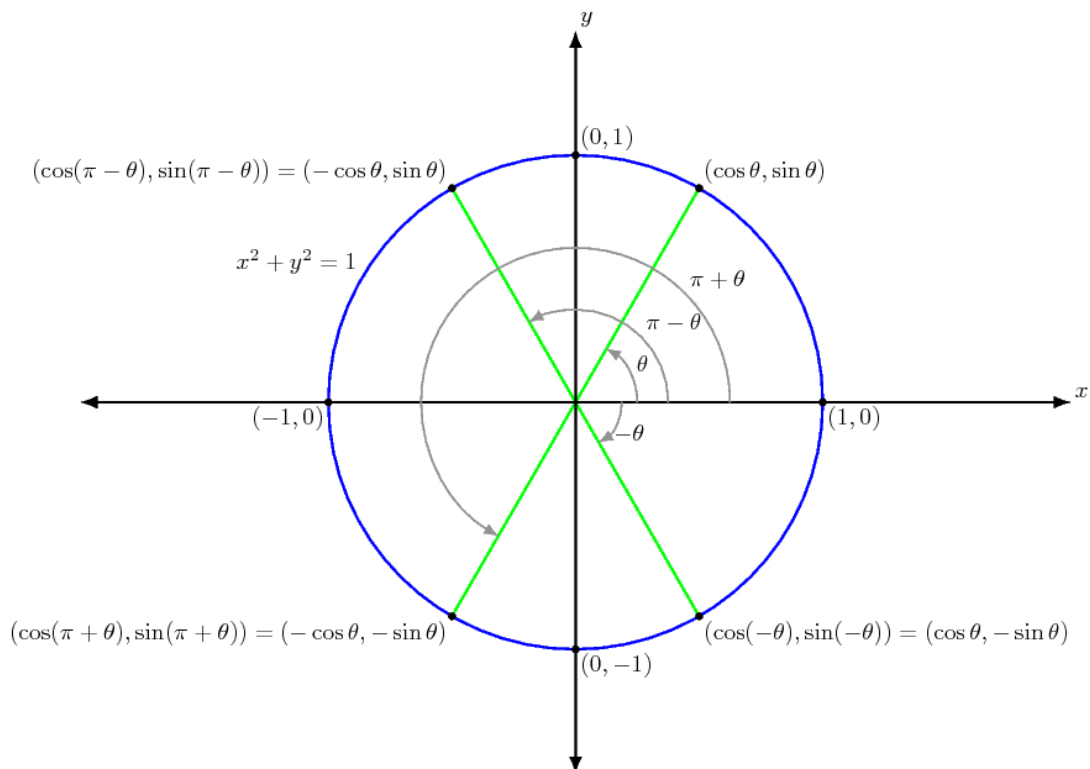
Vektorene er ortogonale dersom dette er lik 0, altså $8 + 2a = 0 \implies 2a = -8 \implies a = -4$.

Oppgave 8

Vi tar arealet av den store sirkelen minus arealet av de to små

$$\text{areal} = \pi \cdot 4^2 - 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

Oppgave 9. Her er en figur som oppsummerer



Nøtt 1.

Kryssproduktet mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Vi starter med å vise at det står normalt på $\mathbf{u}$ ved å vise at skalarproduktet er 0.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - v_2 u_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2) \\ &= u_1(u_2 v_3 - v_2 u_3) + u_2(v_1 u_3 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - v_1 u_2) \\ &= u_1 u_2 v_3 - u_1 v_2 u_3 + u_2 v_1 u_3 - u_2 u_1 v_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 v_1 u_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

For $\mathbf{v}$ får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (v_1, v_2, v_3) \cdot (u_2v_3 - v_2u_3, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2) \\ &= v_1(u_2v_3 - v_2u_3) + v_2(v_1u_3 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - v_1u_2) \\ &= v_1u_2v_3 - v_1v_2u_3 + v_2v_1u_3 - v_2u_1v_3 + v_3u_1v_2 - v_3v_1u_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Nøtt 2.

a) Vi starter med å finne normalvektoren til planet. Planet er spent ut av vektorene $\mathbf{AB} = (0 - 1, 1 - 0, 2 - 3) = (-1, 1, -1)$ og $\mathbf{AC} = (2 - 1, 3 - 0, 2 - 3) = (1, 3, -1)$. Vi kan finne en normalvektor ved å ta kryssproduktet mellom disse to vektorene

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} &= (1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3, -((-1)(-1) - (-1) \cdot 1), (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1) \\ &= (-1 + 3, -1 - 1, -3 - 1) \\ &= (2, -2, -4)\end{aligned}$$

Vektoren $(1, -1, -2)$ er parallell med dette kryssproduktet og fungerer dermed også som normalvektor for planet. Vi bruker at punktet $(1, 0, 3)$ ligger i planet, slik at likningen blir

$$\begin{aligned}1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 0) + (-2) \cdot (z - 3) &= 0 \\ x - 1 - y - 2z + 6 &= 0 \\ x - y - 2z + 5 &= 0\end{aligned}$$

b) Siden planet β er parallelt med α , er også normalvektorene parallelle, så vi kan bruke normalvektoren $(1, -1, -2)$. Likningen blir

$$\begin{aligned}1 \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (y - (-5)) + (-2) \cdot (z - 5) &= 0 \\ x - 2 - y - 5 - 2z + 10 &= 0 \\ x - y - 2z + 3 &= 0\end{aligned}$$

c) Siden α og β er parallelle, ligger kula mellom de to planene. Så diameteren til kula er avstanden mellom

de to planene. Vi finner punktet Q ved å se på skjæringen mellom planet β og linja som er parallell med normalvektoren til β og går gjennom punktet A . En parameterfremstilling for denne linjen er gitt ved

$$x = 1 + t$$

$$y = -t$$

$$z = 3 - 2t$$

(Man finner x -delen av parameterfremstillingen ved å ta x -koordinaten til A pluss t ganget med x -komponenten til normalvektoren. Tilsvarende for y og z .) Så finner vi skjæringen mellom β og denne linjen, ved å putte parameterfremstillingen inn i likningen for planet β

$$(1 + t) - (-t) - 2(3 - 2t) + 3 = 0$$

$$1 + t + t - 6 + 4t + 3 = 0$$

$$6t - 2 = 0$$

$$\implies t = \frac{1}{3}$$

Så Q er gitt ved

$$x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$$z = 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Altså $Q = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.